Exercice 1 : Analyse spectrale

1. Rappeler la condition (ou théorème ou encore critère) de Nyquist-Shannon.

2. Déterminer la fréquence d'échantillonnage minimale à utiliser pour visualiser les spectres des signaux suivants

Nom du signal	Forme mathématique
Signal 1	$s_1(t) = A\sin(2\pi \times 1000t)$
Signal 2	$s_2(t) = A\sin(2\pi \times 10t)$
Somme 1 et 2	$s_3(t) = A\,[\sin(2\pi \times 1000t) + \sin(2\pi \times 10t)]$
Produit 1 et 2	$s_4(t) = B[\sin(2\pi \times 1000t)\sin(2\pi \times 10t)]$
Carré	$s_5(t) = Bsin^2(2\pi \times 1000t)$

3. Pour le signal $s_4(t)$, déterminer le temps d'acquisition minimum et le nombre d'échantillons minimal qui permettront de distinguer toutes les composantes du spectre.

On étudie maintenant des signaux décrits par leur décomposition en série de Fourier.

4. On considère un signal triangulaire d'amplitude A dont la décomposition en série de Fourier est donnée par : $s_6(t) = \frac{8A}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\sin(2\pi \times 1000(2k+1)t)$. Déterminer la fréquence d'échantillonnage minimale à utiliser si l'on peut se permettre de négliger les harmoniques dont l'amplitude est inférieure à *1%* de celle du fondamental.

5. A l'aide d'un oscilloscope numérique, on visualise le spectre d'un signal rectangulaire de fréquence $f_0 = 4\ kHz$ et d'amplitude A. Ce signal a été échantillonné à la fréquence $f_e = 30\ kHz$. Sa décomposition en série de Fourier est : $s_7(t) = \frac{4A}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\sin(2\pi(2k+1)f_0t)$. La condition de Nyquist-Shannon est-elle vérifiée pour ce signal? Discuter. Faire une représentation du spectre obtenu afin d'étayer votre propos.

Exercice 2 : Filtrage

On considère un filtre analogique passe-bas du premier ordre qui agit sur un signal *e(t)* pour fournir en sortie un signal *s(t)*.

1. Rappeler la forme de la fonction de transfert de ce filtre en régime harmonique sachant que sa fréquence de coupure est notée f_c.

2. On considère maintenant le filtre numérique associé à ce filtre passe-bas. La période d'échantillonnage des signaux est T_e. L'équation permettant de déduire la valeur de la sortie, à une date donnée, en fonction de l'état de l'entrée et de la sortie à l'instant précédent se met sous la forme :
$s_{n+1} = s_n + 2\pi\beta(e_n - s_n)$(**formule que vous corrigerez si nécessaire**). Exprimer β en fonction de f_c et de T_e.

3. On prend $\beta = 1/10$. Déterminer la fréquence de coupure de ce filtre pour une fréquence d'échantillonnage de 1 kHz, puis de 10 kHz. Quelle conclusion peut-on en tirer par rapport à un filtre analogique ?

4. La fréquence d'échantillonnage est fixée à $f_e = 10\ kHz$ alors que le signal est donné par $e(t) = Asin(2\pi f_e t)$. On suppose que la date $t = 0$ correspond au premier échantillon e_0. On suppose de plus que $s_0 = 0$. Déterminer les valeurs de s_n. Le résultat était-il prévisible ? On suppose maintenant que la première prise d'échantillon s'effectue à une date $t \neq 0$ tout en restant inférieure à la demi-période du signal. Déterminer les valeurs de s_n et commenter.

5. Même question lorsque le signal est $e(t) = Acos(2\pi f_e t)$.

6. En pratique, comment doit-on choisir la fréquence d'échantillonnage pour éviter les problèmes mis en évidence avant.

Exercice 3 : Convertisseur Numérique-Analogique

Afin d'écouter la musique d'un CD audio, on envoie la sortie numérique donnée par le lecteur CD ou, l'ordinateur à l'entrée d'un haut-parleur. Le haut-parleur fonctionnant avec un signal analogique, un CNA 4 bits à résistances pondérées est utilisé, voir le schéma de la figure 1. Il est constitué d'une tension E constante de référence, de 4 résistances $R_n = R/2^n$ pour $0 \leq n \leq 3$ et 4 interrupteurs $\varepsilon_n = 0$ ou 1 où 1 représente un interrupteur fermé et 0 un interrupteur ouvert. Un code 1101 signifie que $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 1$ et $\varepsilon_3 = 1$. Un convertisseur courant-tension donne la tension U_g qui alimente le haut-parleur. On donne la caractéristique entrée-sortie du convertisseur : il se comporte en sortie comme un générateur de tension parfait de fem $U_g = R'i$ tant que la tension de saturation n'est pas atteinte. Il sature à $V_{sat} = 15V$ ensuite.

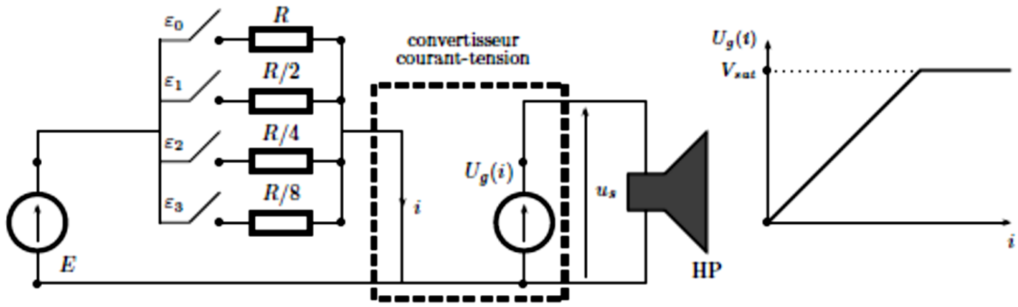


Figure 1 : Convertisseur Numérique-Analogique et convertisseur courant-tension

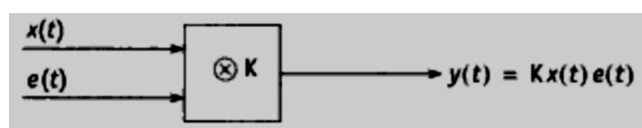
1. Déterminer l'intensité du courant circulant dans la résistance R_n en fonction de ε_n, R et E. En déduire la tension u_s. Commenter le résultat obtenu.
2. On choisit dans un premier temps $R = R'$ et $E = 1V$. Calculer la valeur de la tension correspondant à 0000, 0001, 0010, 0011 et 0100. Calculer également la tension de sortie maximale. Commenter.
3. En réalité, le signal audio est enregistré sur un CD avec 16 bits. On place donc en parallèle 16 résistances de valeur $R_n = R/2^n$. Calculer la valeur maximale obtenue en sortie. Que pensez-vous de la situation ? Proposer des solutions.

Exercice 4

1) Numérisation d'un signal analogique *x(t)*

A cet effet, le signal x(t) est traité selon le principe suivant (voir schema).
L'opérateur ⊗K réalise l'opération multiplication des signaux $x(t)$ et $e(t)$ (K est une constante positive).
$e(t)$ est un signal périodique lié à une horloge lui imposant une période T_H. Ainsi :

$$\begin{cases} e = E_0 \;\; pour \;\; nT_H - \frac{\tau}{2} \leq t \leq nT_H + \frac{\tau}{2} \\ e = 0 \;\; autrement \end{cases}$$



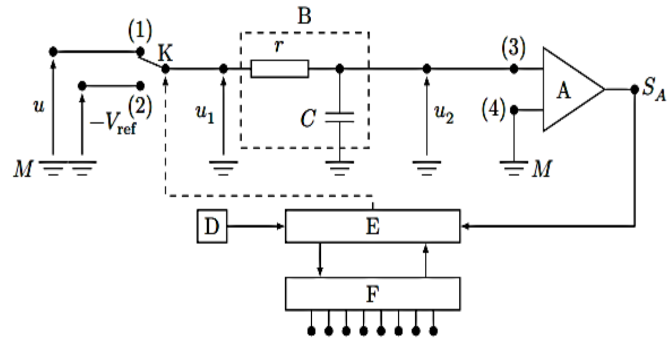
L'étude qui suit prend pour exemple un signal source sinusoidal : $x(t) = a\sin\omega' t$ avec $\omega' = 2\pi f'$.
A.N. $E_0 = 1V$; a = 5V; $T_H = 0{,}1$ ms ; $\tau = 10$ µs ; f' = 1kHz et K=2.
1.a) Expliquer qualitativement comment s'effectue la numérisation du signal *x(t)*
1.b) Montrer que le signal de sortie y(t) peut être considéré comme la superposition de composantes sinusoïdales.

2) Restitution du signal source

Le signal numérisé est transformé par un CNA en un signal analogique z(t) semblable au signal y(t) étudié au 1) (on prendra $z(t) = y(t)$). Pour récupérer le signal source $x(t)$, on réalise un filtrage du signal $z(t)$. On considère un filtre passe-bas idéal. Montrer qu'un filtrage efficace nécessite une fréquence d'échantillonnage f_H supérieur à une valeur limite que l'on déterminera en fonction de f'.

Exercice 5 : Numérisation

Figure 2



Dans tout système de stockage numérique de données, la première étape est celle de la numérisation. Les signaux du monde réel sont analogiques, pour les transformer en signaux numériques on utilise un convertisseur analogique numérique, noté CAN par la suite.

I.A – Au cœur de tous les convertisseurs se trouve un compteur (noté F sur la Figure 2), commandé par un signal d'horloge (noté D) qui incrémente le compteur à chaque bip d'horloge (le compteur est lui-même commandé par une logique de commande notée E). La fréquence du signal d'horloge est de l'ordre de quelques GHz, on la suppose parfaitement stable. Le compteur compte à partir de zéro, dès que la commande de compter lui a été donnée, au rythme imposé par le signal d'horloge. Il fournit en sortie un nombre codé sur N bits.

I.A.1) Quelle est la plus petite durée mesurable (précision maximale) à l'aide d'un compteur dont le signal d'horloge a une fréquence f_{ck} = 1 GHz ?

I.A.2) L'architecture des premiers **CAN** était de type « série », elle est modélisée par le dispositif schématisé sur la **Figure 2**. La tension positive u dont la valeur est comprise entre 0V et V_{ref} (V_{ref} = 2V), supposée constante pendant la durée de la numérisation, est convertie en un nombre S_N.

Le convertisseur est composé d'un circuit r, C formant le bloc **B**, d'un comparateur **A**, et d'éléments intégrés parmi lesquels le bloc logique de commande **E**, le générateur de signal d'horloge **D** et le compteur sur N bits **F**.

Les résistances d'entrée des blocs **A**, **E** et **F** sont infinies.

Le module **A** compare les potentiels des nœuds **(3)** et **(4)**. Lorsque $V_{(3)} > V_{(4)}$, son potentiel de sortie V_{SA} est au niveau haut, de sorte que $v_{SA} = V_{SA} - V_M = 5\ V$. Lorsque $V_{(3)} < V_{(4)}$, son potentiel de sortie est au niveau bas ($v_{SA} = 0\ V$). Il commande ainsi le bloc logique **E**.

L'interrupteur **K** est commandé par le bloc logique **E**, ce qui est symbolisé par un trait pointillé.

a) Préciser ce qu'on appelle masse dans un montage électrique.

b) Représenter le graphe de la tension $v_{SA} = V_{SA} - V_M$ en fonction de u_2.

I.A.3) Partant d'une situation où le condensateur est déchargé, **E** commande à l'instant t = 0 la mise en position **(1)** de l'interrupteur **K**. L'interrupteur reste dans cette position pendant une durée $t_1 = \frac{2^n - 1}{f_{ck}}$ qui correspond à un cycle complet de comptage du compteur sur N bits. Étudier u_2 en fonction du temps entre t = 0 et t_1. Faire apparaître une constante τ, homogène à un temps, caractéristique du bloc **B**.

I.B – Pour toute la suite, on choisit les valeurs de r et C de sorte que $t_1 \ll \tau$.

I.B.1).

a) Donner alors l'expression simplifiée de u_2 en fonction du temps, ainsi que le lien simplifié entre u_1 et $\frac{du_2}{dt}$.

b) Quelle est alors la fonction du bloc **B** ?

c) Que vaut v_{SA} entre 0 et t_1?

I.B.2) Le bloc de commande fait basculer l'interrupteur K en position **(2)** à l'instant t_1 et déclenche le comptage. Celui-ci dure jusqu'à l'instant $t_1 + t_2$ tel que le signal v_{SA} soit modifié.

a) Exprimer t_2 en fonction de $u, t_{1\ et\ V_{ref}}$.

b) Représenter sur un même graphe $u_2\ et\ u_1$ en fonction du temps, entre t = 0 et $t_1 + t_2$.

I.B.3) Quelle est la durée maximale de la conversion analogique numérique pour un convertisseur 8 bits commandé par un signal d'horloge de fréquence f_{ck}= 1 GHz ?
En déduire une condition sur la fréquence des signaux qu'on peut numériser avec un tel convertisseur. Commenter.

I.C – Les convertisseurs plus récents ont une architecture parallèle.
La **Figure 3** représente un convertisseur 3 bits, qui convertit une tension u qui vérifie
$0 < u < V_{ref}$. Il est composé de 7 comparateurs, d'une logique de commande et de résistances de valeur r, 2r et 3r. Les comparateurs ont une impédance d'entrée infinie et délivrent un signal logique qui est au niveau haut lorsque la patte reliée à u a un potentiel supérieur à celui de la patte reliée à V_{ref} par l'intermédiaire des résistances.

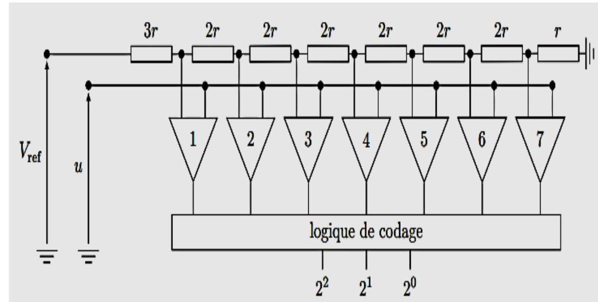


Figure 3

I.C.1) Expliquer le fonctionnement de ce convertisseur.
I.C.2) Pour un convertisseur 8 bits, combien faut-il de comparateurs ?

Exercice 6 : Le CD audio

Nous cherchons à enregistrer un concert sur un CD audio, en format non compressé (WAV par exemple) afin de ne pas perdre en qualité. Le son est capté par un microphone (signal analogique), puis filtré par un passe-bas, et enfin échantillonné avec une fréquence f_e. La fréquence d'échantillonnage d'un CD audio est de f_e = 44100Hz, et la quantification est faite sur 16 bits (chaque mesure est codée sur 16 bits).

1) Les fréquences audibles vont de 20 Hz à 20 kHz.
1.a) Quelle doit-être alors la fréquence d'échantillonnage minimale pour enregistrer tout le spectre audible ?
1.b) La fréquence f_e = 44100Hz est-elle compatible ?
2) On choisit tout d'abord de ne pas mettre le filtre passe-bas en amont du CAN. Un son de fréquence f_1 = 43 000 Hz est présent lors du concert.
2.a) Ce sont est-il audible lors du concert ? Que deviendra-t-il après l'échantillonnage ? En quoi cela pose problème ?
2.b) Expliquer en quoi l'ajout du filtre passe-bas en amont de l'échantillonneur pour résoudre ce problème. Estimer sa fréquence de coupure.
2.c) Quel autre problème peut apporter à son tour ce filtre ? Pour atténuer ce problème, on augmente l'ordre du filtre, et on effectue un suréchantillonnage (f_e un peu plus élevée que prévu par le critère de Shannon). Expliquer pourquoi.
3) On cherche maintenant à calculer la durée d'enregistrement que peut contenir un CD audio enregistrable du commerce, soit 700 Mo.
3.a) Sachant que l'enregistrement s'effectue à f_e = 44100 Hz sur 16 bits d'échantillonnage, et que l'on enregistre en stéréo, donc deux sons (2 signaux), de combien de bits a-t-on besoin pour enregistrer 1 seconde de concert ?
3.b) Quelle durée de concert peut-on enregistrer sur le CD de 700 Mo ? On rappelle que 1 octet vaut 8 bits.
3.c) Il est possible de compresser le signal pour l'enregistrer au format MP3. La fréquence d'échantillonnage et la quantification sont inchangées, mais un traitement numérique du signal repère les redondances pour ne les écrire qu'une seule fois, et enlève les signaux peu audibles. Le taux de compression peut aller de 4 à 20. Quelle durée de musique peut-on alors enregistrer sur 700 Mo ?